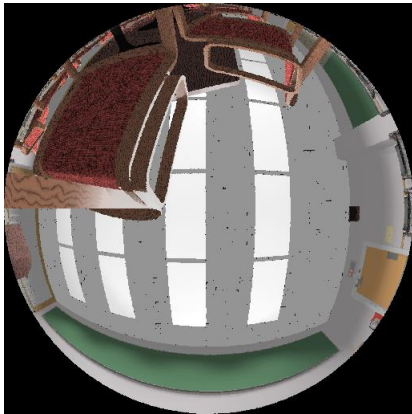

Počítačová grafika III – Monte Carlo integrování Přímé osvětlení

Jaroslav Křivánek, MFF UK

Jaroslav.Krivanek@mff.cuni.cz

Rendering = Integrovaní funkcí

$$L_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \int_{H(\mathbf{x})} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$



Příchozí radiance
 $L_i(\mathbf{x}, \omega_i)$ pro jeden
bod na podlaze.

■ Problémy

- ❑ Nespojitosť integradu (viditelnost)
- ❑ Téměř libovolné hodnoty integrandu (distribuce světla, BRDF)
- ❑ Složitá geometrie

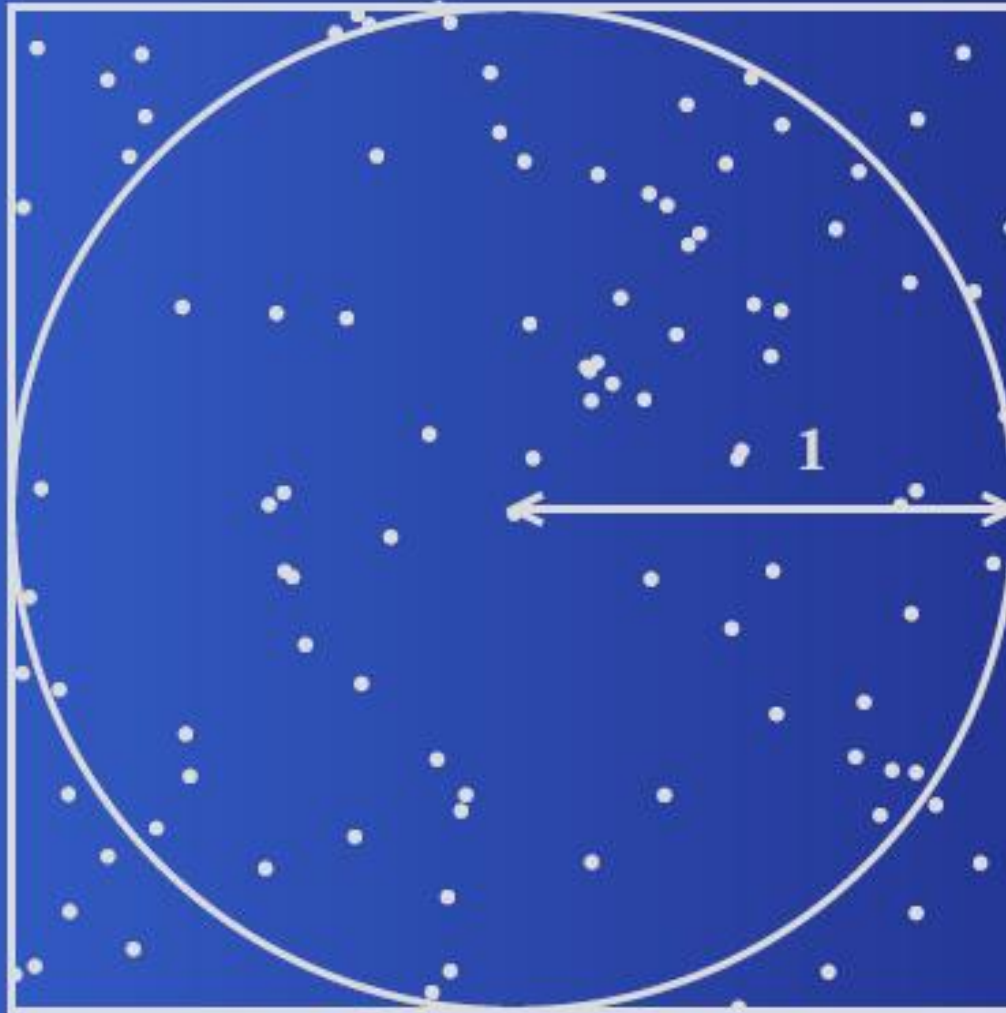
Historie Monte Carlo (MC)

- Vývoj atomové bomby, Los Alamos 1940, John von Neumann, Stanislav Ulam, Nicholas Metropolis
- Rozvoj a aplikace metod od roku 1949

Metoda Monte Carlo

- Simuluje se mnoho případů daného děje, například:
 - Neutrony – vznik, zánik, srážky s atomy vodíku
 - Úlohy hromadné obsluhy – chování počítačových sítí, dopravní situace
 - Sociologické a ekonomické modely – demografie, vývoj inflace, pojišťovnictví atd.

Example: calculation of π



Area of square: $A_s = 1$

Area of circle: $A_c = \pi$

Fraction p of random points inside circle:

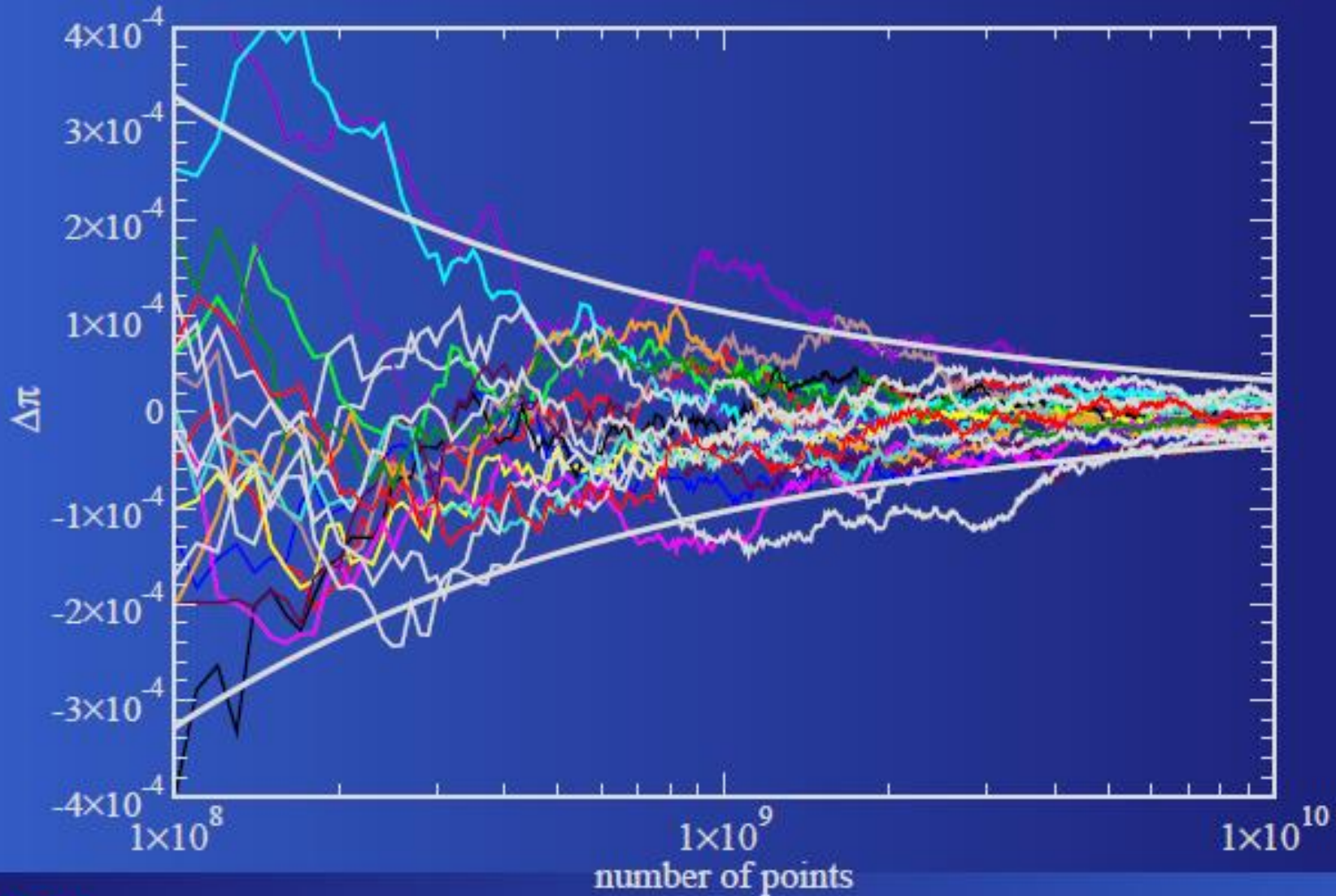
$$p = \frac{A_c}{A_s} = \frac{\pi}{4}$$

Random points: N

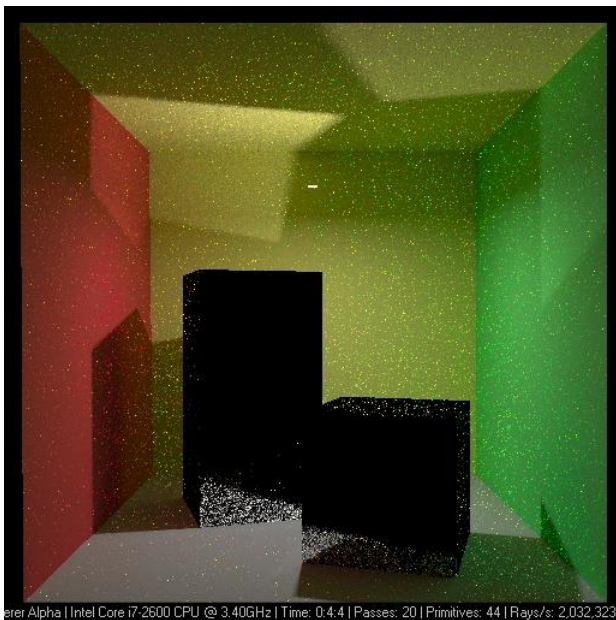
Random points inside circle: N_c

$$\Rightarrow \pi = \frac{4N_c}{N}$$

Calculation of π (cont'd)



Šum v obrázcích



Odbočka – Kvadraturní vzorce pro numerické integrování

- Obecný předpis v 1D:

$$\hat{I} = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

| | |
|----------|---|
| f | integrand (tj. integrovaná funkce) |
| n | řád kvadratury (tj. počet vzorků integrandu) |
| x_i | uzlové body (tj. umístění vzorků v oboru integrálu) |
| $f(x_i)$ | vzorky integrandu |
| w_i | váhy |

Odbočka – Kvadraturní vzorce pro numerické integrování

- Kvadraturní pravidla se liší volbou uzlových bodů x_i a váhami w_i
 - Obdélníková metoda, Rovnoběžníková metoda, Simpsonova metoda, Gaussovská kvadratura, ...
- Vzorke na integračním oboru (tj. uzlové body) jsou rozmístěny deterministicky
 - Jednoznačně určeny kvadraturním pravidlem

Kvadrurní vzorce pro více dimenzí

- Obecný předpis pro integrování fcí více proměnných:

$$\hat{I} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_s=1}^n w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_s} f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s})$$

- Rychlost konvergence pro s -dimenzionální integrál je $O(N^{-1/s})$
 - Např. pro dvojnásobné zpřesnění odhadu 3-rozměrného integrálu musíme zvýšit počet vzorků $2^3 = 8$ krát
- Nepoužitelné pro vysokodimenzionální integrály
 - **Dimenzionální exploze**

Kvadrurní vzorce pro více dimenzí

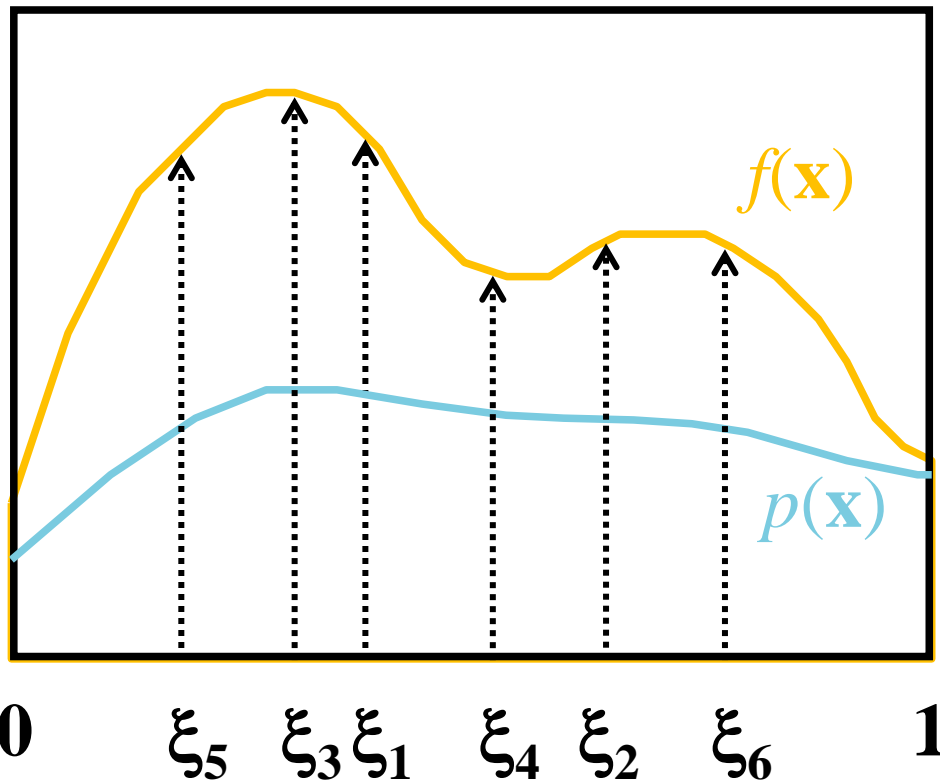
■ Kvadrurní vzorce

- V 1D lepší přesnost než Monte Carlo
- Ve 2D srovnatelné s MC
- Od 3D bude MC téměř vždy lepší

■ Kvadrurní metody NEJSOU metody Monte Carlo!

Monte Carlo integrování

- Obecný nástroj k numerickému odhadu určitých integrálů



Integrál:

$$I = \int f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Monte Carlo odhad I :

$$\langle I \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(\xi_i)}{p(\xi_i)}; \quad \xi_i \propto p(\mathbf{x})$$

„V průměru“ to funguje:

$$E[\langle I \rangle] = I$$

Monte Carlo integrování

- Vzorky jsou rozmístěny náhodně (nebo pseudonáhodně)
- Konvergence: $O(N^{-1/2})$
 - **Konvergence nezávisí na dimenzionalitě**
 - Rychlejší než klasické kvadrurní vzorce pro 3 a více dimenzí
- Speciální metody pro rozmístění vzorků
 - Quasi-Monte Carlo, Randomized quasi-Monte Carlo
 - Ještě rychlejší konvergence než MC

Monte Carlo integrování – shrnutí

■ Výhody

- ❑ Jednoduchá implementace
- ❑ Robustní řešení pro různé tvary domén a integrantů
- ❑ Efektivní pro vícerozměrné integrály

■ Nevýhody

- ❑ Relativně pomalá konvergence – zmenšení statistické chyby o polovinu vyžaduje zvětšit počet vzorků čtyřikrát
- ❑ Pro syntézu obrazu: obrázek obsahuje šum

The MC method: applications

- Financial market simulations
- Traffic flow simulations
- Environmental sciences
- Particle physics
- Quantum field theory
- Astrophysics
- Molecular modeling
- Semiconductor devices
- Optimization problems
- **Light transport calculations**
- ...

Náhodné veličiny

Náhodná veličina

- X ... náhodná veličina
- X nabývá různých hodnot s různou pravděpodobností
 - $X \sim p(x)$
 - Rozložení pravděpodobnosti

Diskrétní náhodná veličina

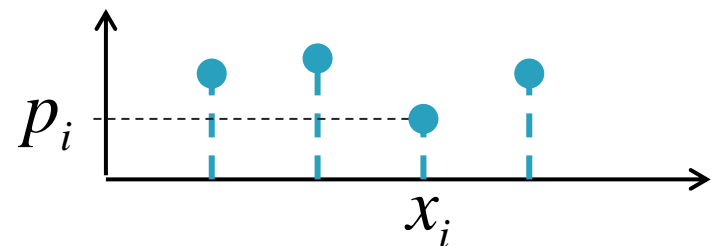
- Konečná množina hodnot x_i
- S pravděpodobnostmi p_i

$$p_i \equiv \Pr(X = x_i) \geq 0 \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

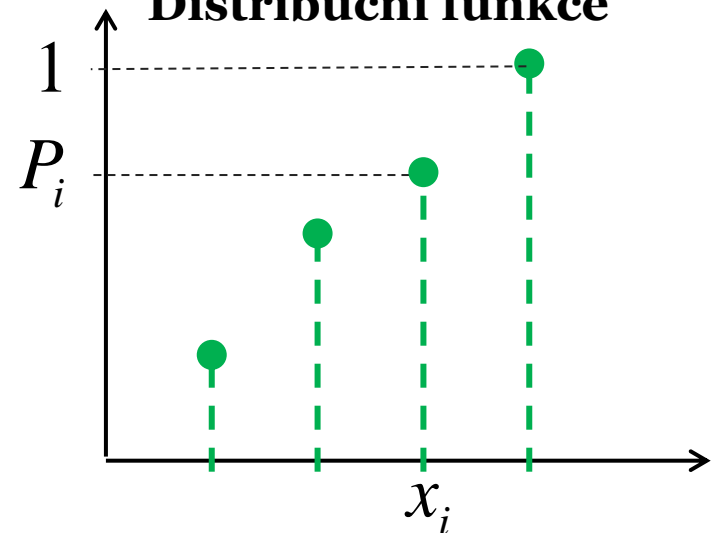
- **Distribuční funkce**
(cumulative distribution function)

$$P_i \equiv \Pr(X \leq x_i) = \sum_{j=1}^i p_j \quad P_n = 1$$

Pravděpodobnostní funkce (probability mass function)



Distribuční funkce



Spojité náhodná veličina

- **Hustota pravděpodobnosti** $p(x)$
(probability density function, **pdf**)

$$\Pr(X \in D) = \int_D p(x) dx$$

- V 1d:

$$\Pr(a < X \leq b) = \int_a^b p(t) dt$$

Spojité náhodná veličina

- **Distribuční funkce** $P(x)$
(cumulative distribution function, **cdf**)
V 1d:

$$P(x) \equiv \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$$

$$\Pr(X = a) = \int_a^a p(t) dt = 0!$$

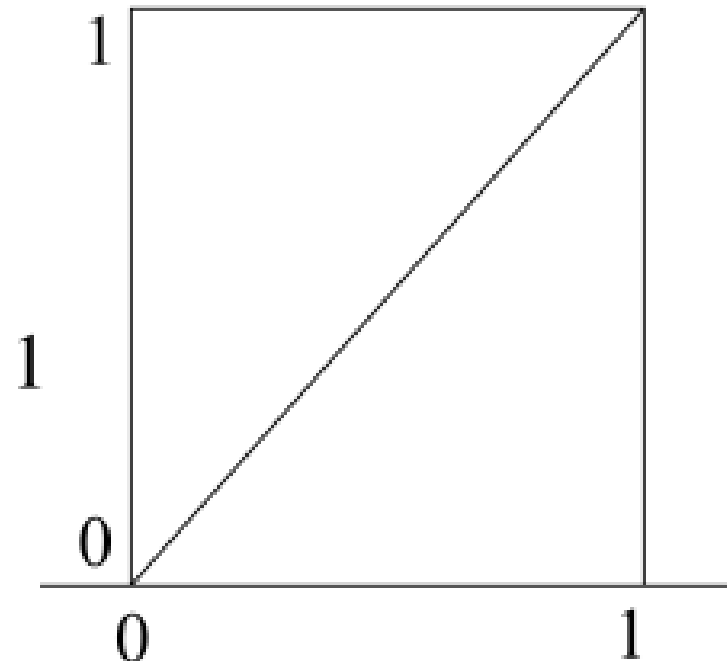
Spojité náhodná veličina

Př. Rovnoměrné rozdělení (uniform distribution)

Hustota
pravděpodobnosti
(pdf)



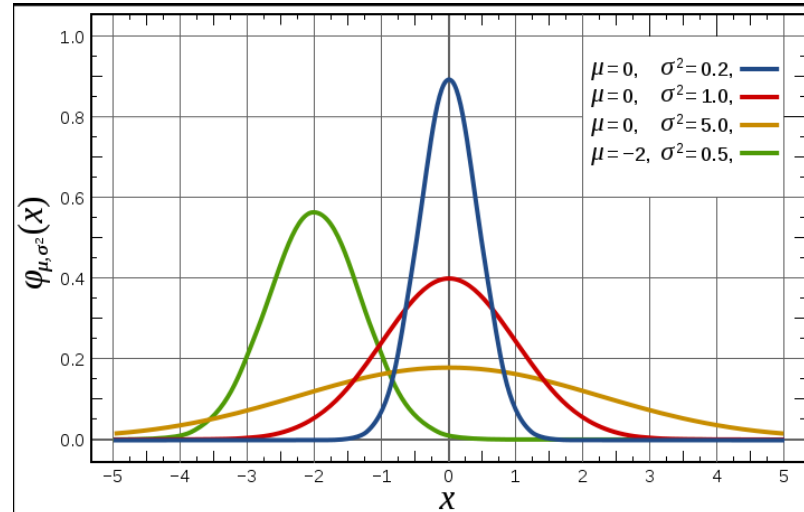
Distribuční
funkce (cdf)



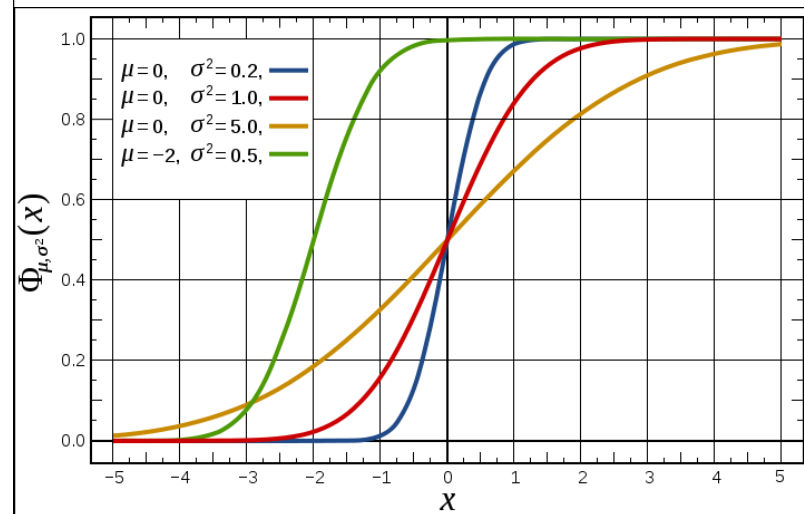
Spojité náhodná veličina

Gaussovské (normální) rozdělení

Hustota
pravděpodobnosti
(pdf)



Distribuční
funkce (cdf)



Zdroj: wikipedia

Střední hodnota a rozptyl

- **Střední hodnota** (očekávaná hodnota, expected value)

$$E[X] = \int_D \mathbf{x} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

- **Rozptyl** (variance)

$$\begin{aligned} V[X] &= E[(X - E[X])^2] \\ &= E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] \\ &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

- **Vlastnosti**

$$V\left[\sum_i X_i\right] = \sum_i V[X_i] \quad (\text{pokud jsou } X_i \text{ nezávislé})$$

$$V[aX] = a^2 V[X]$$

Transformace náhodné veličiny

$$Y = f(X)$$

- Y je náhodná veličina
- Střední hodnota Y

$$E[Y] = \int_D f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Monte Carlo integrování

Primární estimátor určitého integrálu

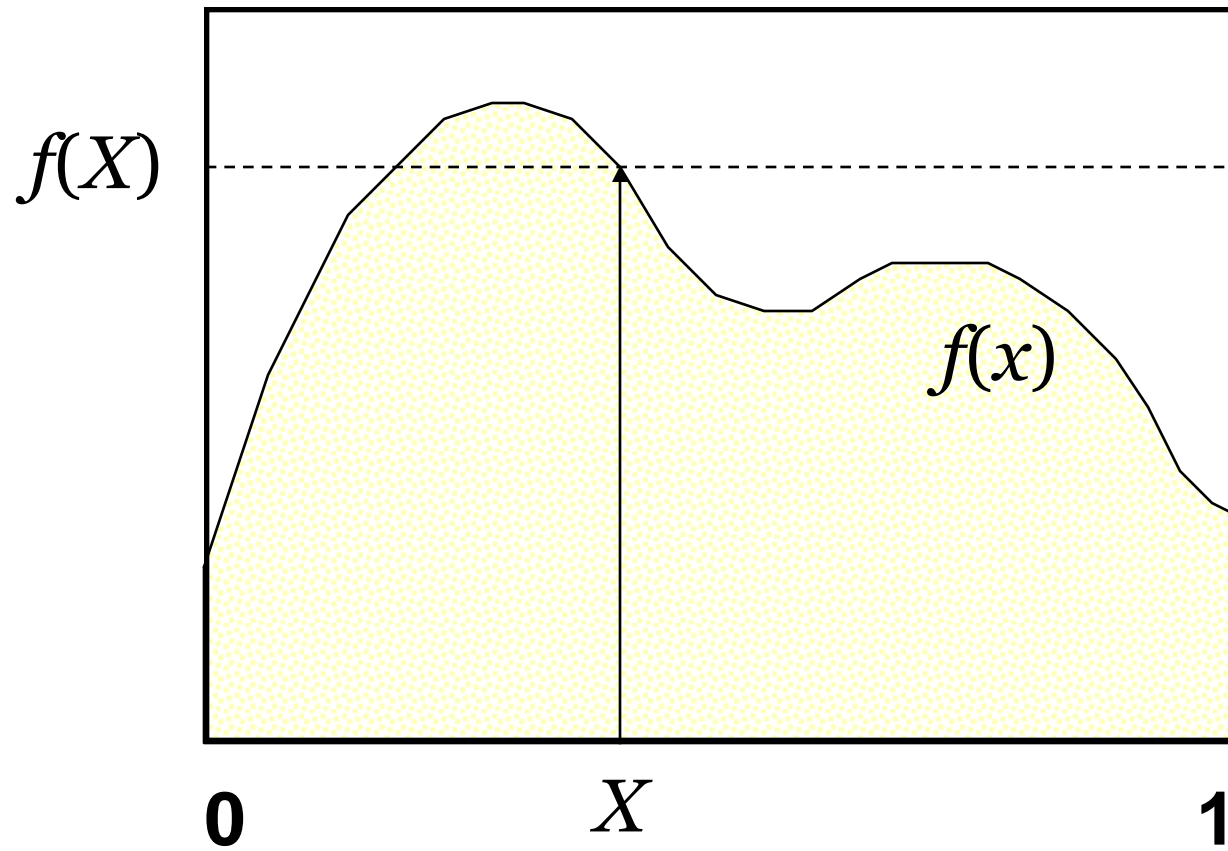
Odhadovaný integrál:

$$I = \int_{\Omega} f(x) dx$$

Je-li X náhodná veličina s distribucí $p(x)$, pak $f(X)/p(X)$ je tzv. **primární estimátor** integrálu:

$$F_{\text{prim}} = \frac{f(X)}{p(X)}$$

Primární estimátor určitého integrálu



Estimátor a odhad

- **Estimátor je náhodná veličina**
 - Vznikla transformací jiné náhodné veličiny
- Její **realizace** (hodnota) je konkrétní **odhad** (**estimate**)

Nestrannost obecného estimátoru

- **Nestrannost estimátoru (obecně):**
 - „V průměru“ estimátor dává správnou hodnotu odhadované veličiny (bez systematické chyby)

$$E[F] = Q$$

Estimátor veličiny Q
(náhodná veličina)

Odhadovaná veličina
(např. integrál)

Nestrannost

Náš estimátor F_{prim} je nestranným (**unbiased**) odhadem I

$$\begin{aligned} E[F_{\text{prim}}] &= \int_{\Omega} \frac{f(x)}{p(x)} p(x) dx \\ &= I \end{aligned}$$

Rozptyl primárního estimátoru

Měřítkem kvality odhadu je jeho **rozptyl** (nebo standardní odchylka):

$$\underline{V[F_{\text{prim}}] = \sigma_{\text{prim}}^2 = E[F_{\text{prim}}^2] - E[F_{\text{prim}}]^2 = \int_{\Omega} \frac{f(x)^2}{p(x)} dx - I^2}$$

(pro nestranný odhad)

Při výpočtu **jediného vzorku** je rozptyl výsledku příliš velký!

Sekundární estimátor integrálu

- N nezávislých náhodných veličin, $f(X_i) / p(X_i)$

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(X_i)}{p(X_i)}$$

- Sekundární estimátor je **nestranný**

Rozptyl sekundárního estimátoru

$$\begin{aligned}V[F_N] &= V\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(X_i)}{p(X_i)}\right] \\&= \frac{1}{N^2} \cdot N \cdot V\left[\frac{f(X_i)}{p(X_i)}\right] \\&= \frac{1}{N} V\left[\frac{f(X_i)}{p(X_i)}\right] \\&= \frac{1}{N} V[F_{\text{prim}}]\end{aligned}$$

... std. chyba je **\sqrt{N} -krát menší!**
(konvergence **$1/\sqrt{N}$**)

Vlastnosti estimátorů

Nestrannost obecného estimátoru

- **Nestrannost estimátoru (obecně):**
 - „V průměru“ estimátor dává správnou hodnotu odhadované veličiny (bez systematické chyby)

$$E[F] = Q$$

Estimátor veličiny Q
(náhodná veličina)

Odhadovaná veličina
(např. integrál)

Výchylka (bias) obecného estimátoru

- Pokud

$$E[F] \neq Q$$

pak estimátor není nestranný (je vychýlený, „**biased**“).

- Systematická chyba, **bias**

$$\beta = Q - E[F]$$

Konzistence (obecného estimátoru)

- Uvažujme sekundární estimátor (N vzorků):

$$F_N = F_N(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

- Estimátor F_N je **konzistentní** pokud

$$Pr \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} F_N = Q \right\} = 1$$

tj. pokud **chyba** $F_N - Q$ jde k nule s pravděpodobností 1.

Konzistence (obecného estimátoru)

- Postačující podmínka pro konzistenci estimátoru:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \beta[F_N] = \lim_{N \rightarrow \infty} V[F_N] = 0$$

↑
bias

(tj. ne každý nestranný estimátor je konzistentní)

Zobrazovací algoritmy

- **Nestranné (unbiased)**

- Sledování cest (path tracing)
- Obousměrné sledování cest (bidirectional path tracing)
- Metropolis light transport

- **Konzistentní (consistent)**

- Progresivní fotonové mapy (progressive photon mapping)

- **Nekonzistentní, vychýlené (biased)**

- Fotonové mapy (photon mapping)
- Irradiance / radiance caching

Střední kvadratická chyba (Mean Squared Error – MSE)

- **Definice**

$$MSE[F] = E[(F - Q)^2]$$

- **Platí**

$$MSE[F] = V[F] + \beta[F]^2$$

- **Důkaz**

$$\begin{aligned} MSE[F] &= E[(F - Q)^2] \\ &= E[(F - E[F])^2] + 2E[F - E[F]](E[F] - Q) + (E[F] - Q)^2 \\ &= V[F] + \beta[F]^2, \end{aligned}$$

Střední kvadratická chyba (Mean Squared Error – MSE)

- Pokud F je nestranný, pak

$$MSE[F] = V[F]$$

tj. pro nestranný estimátor je snazší odhadnout chybu, protože rozptyl estimátoru lze odhadnout ze vzorků

$$Y_i = f(X_i) / p(X_i)$$

- Nestranný **estimátor rozptylu**

$$\hat{V}[F_N] = \frac{1}{N-1} \left\{ \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i^2 \right) - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \right)^2 \right\}$$

Účinnost estimátoru

- Pro nestranný estimátor je **účinnost** (eficience, angl. efficiency) dána vztahem:

$$\epsilon[F] = \frac{1}{V[F] T[F]}$$

rozptyl

čas výpočtu (počet operací, např. počet vržených paprsků)

Metody snížení rozptylu MC estimátorů

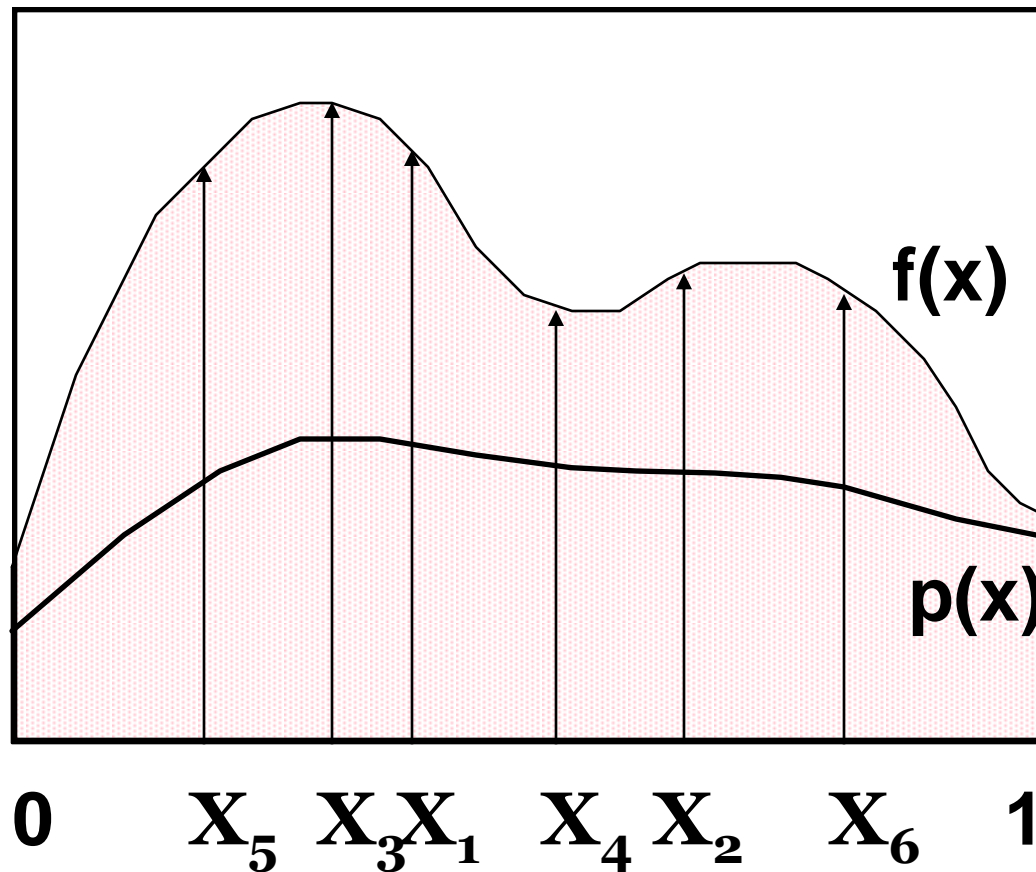
Metody snížení rozptylu

- Importance sampling (vzorkování podle důležitosti)
 - a) Podle BRDF (nejčastější)
 - b) Podle L_i (pokud známo: přímé osvětlení)
 - V syntéze obrazu je IS **nejčastěji používaná metoda**
- Řídící funkce (control variates)
- Lepší rozložení vzorků
 - Stratifikace
 - quasi-Monte Carlo (QMC)

Vzorkování podle důležitosti

- Některé části vzorkovaného intervalu jsou **důležitější**, protože zde má f větší hodnotu
 - Vzorky z těchto oblastí mají větší vliv na výsledek
- Vzorkování podle důležitosti (“**importance sampling**”) umisťuje vzorky přednostně do takových oblastí
 - Tj. **pdf** p je „podobná“ integrandu
- **Menší rozptyl** při zachování nestrannosti

Vzorkování podle důležitosti



Řídící funkce

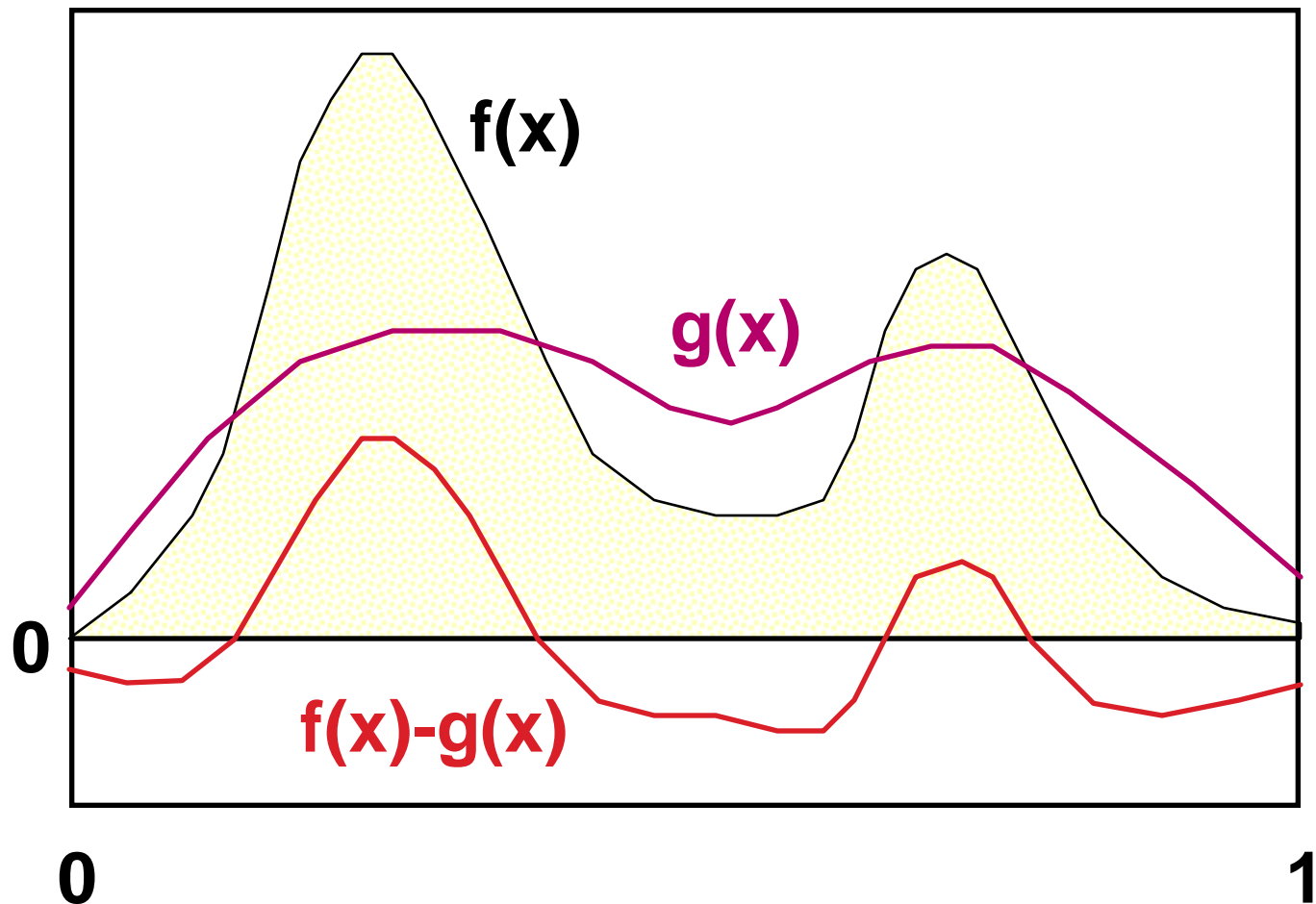
Funkce $g(\mathbf{x})$, která **aproximuje integrant** a dokážeme ji **analyticky integrovat**:

$$I = \int f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \underbrace{\int [f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})] \, d\mathbf{x}}_{\text{numerické integrování (MC) menší rozptyl než } f(\mathbf{x})} + \underbrace{\int g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}}_{\text{umíme analyticky integrovat}}$$

numerické integrování (MC)
menší rozptyl než $f(\mathbf{x})$

umíme analyticky
integrovat

Transformace řídicí funkcí



Řídící funkce vs. Importance sampling

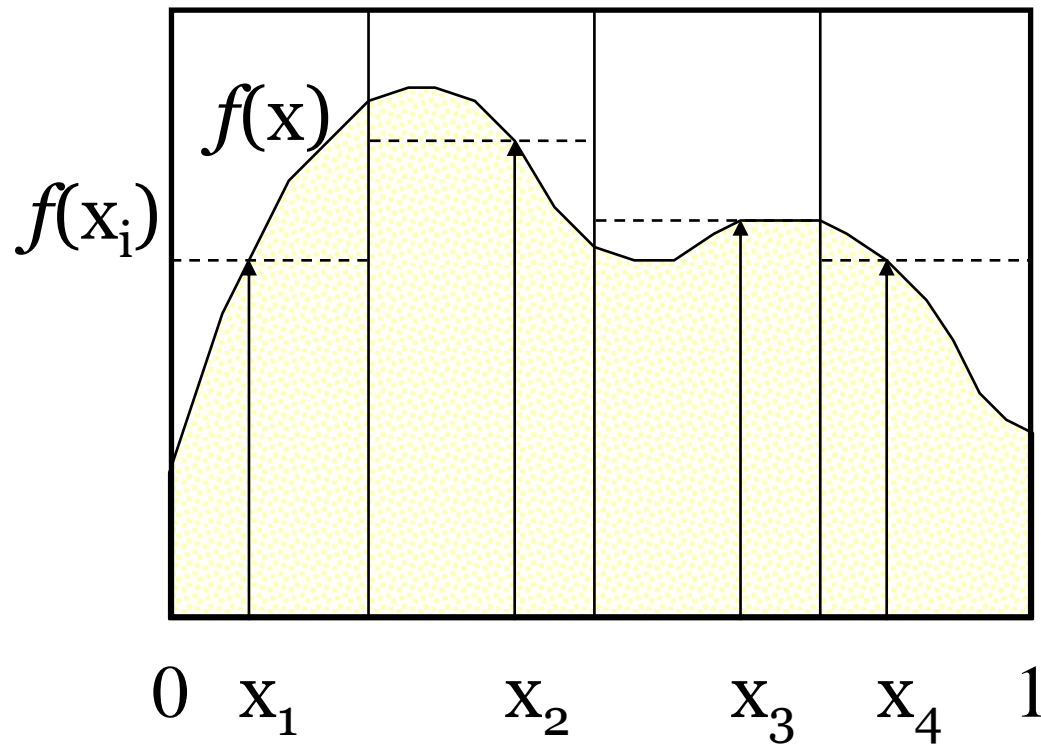
- Importance sampling
 - Lepší pokud se funkce, podle níž umíme vzorkovat, vyskytuje v integrantu jako multiplikativní člen (rovnice odrazu, zobrazovací rovnice).
- Řídící funkce
 - Lepší pokud se funkce, kterou umíme analyticky integrovat, vyskytuje v integrantu jako aditivní člen.
- Proto v se v syntéze obrazu téměř vždy používá importance sampling.

Lepší rozmístění vzorků

- Při výběru množiny nezávislých vzorků se stejnou hustotou pravděpodobnosti dochází ke shlukování
 - velký rozptyl odhadu
- Lepší rozmístění vzorků = integrační oblast je pravidelněji pokryta
 - snížení rozptylu
- Metody
 - Vzorkování po částech (stratifikace, **stratified sampling**)
 - quasi-Monte Carlo (QMC)

Vzorkování po částech

- Interval se rozdělí na části, které se odhadují samostatně



Vzorkování po částech

Rozdělení intervalu Ω na N částí Ω_i :

$$I = \int_{\Omega} f(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^N I_i$$

Estimátor:

$$\hat{I}_{\text{strat}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i), \quad X_i \in \Omega_i$$

Vzorkování po částech

- Potlačuje shlukování vzorků
- Redukuje rozptyl odhadu
 - Rozptyl menší nebo roven rozptylu sekundárního estimátoru
- Velmi účinné pro nízkou dimenzi integrantu

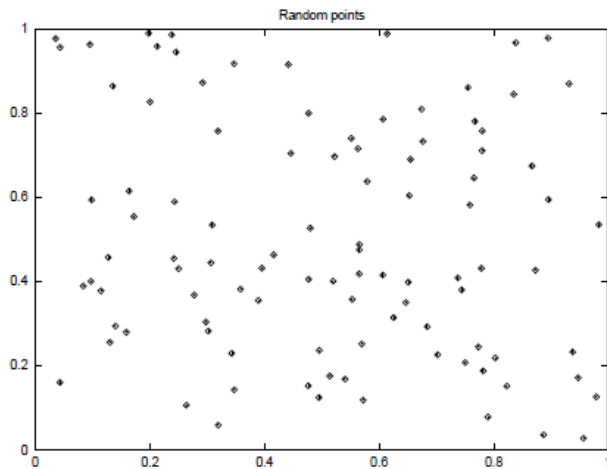
Rozklad intervalu na části

- **uniformní** rozklad intervalu **(0,1)**
 - přirozená metoda pro zcela neznámou funkci **f**
- známe-li alespoň přibližně **průběh funkce f** , snažíme se o takový rozklad, aby byl rozptyl funkce na subintervalech co nejmenší
- rozklad **d -rozměrného intervalu** vede na **N^d** výpočtů
 - úspornější metodou je vzorkování “ **N věží**”

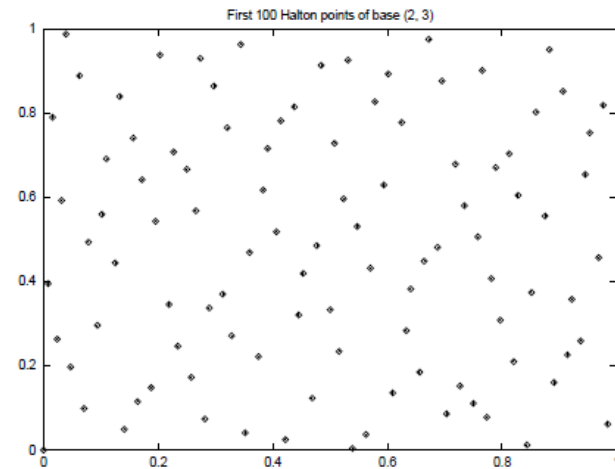
Metody Quasi Monte Carlo (QMC)

- Použití striktně deterministických sekvencí místo náhodných čísel
- Vše funguje jako v MC, důkazy se ale nemohou opírat o statistiku (nic není náhodné)
- Použité sekvence čísel s nízkou dikrepancí (**low-discrepancy sequences**)

Diskrepance

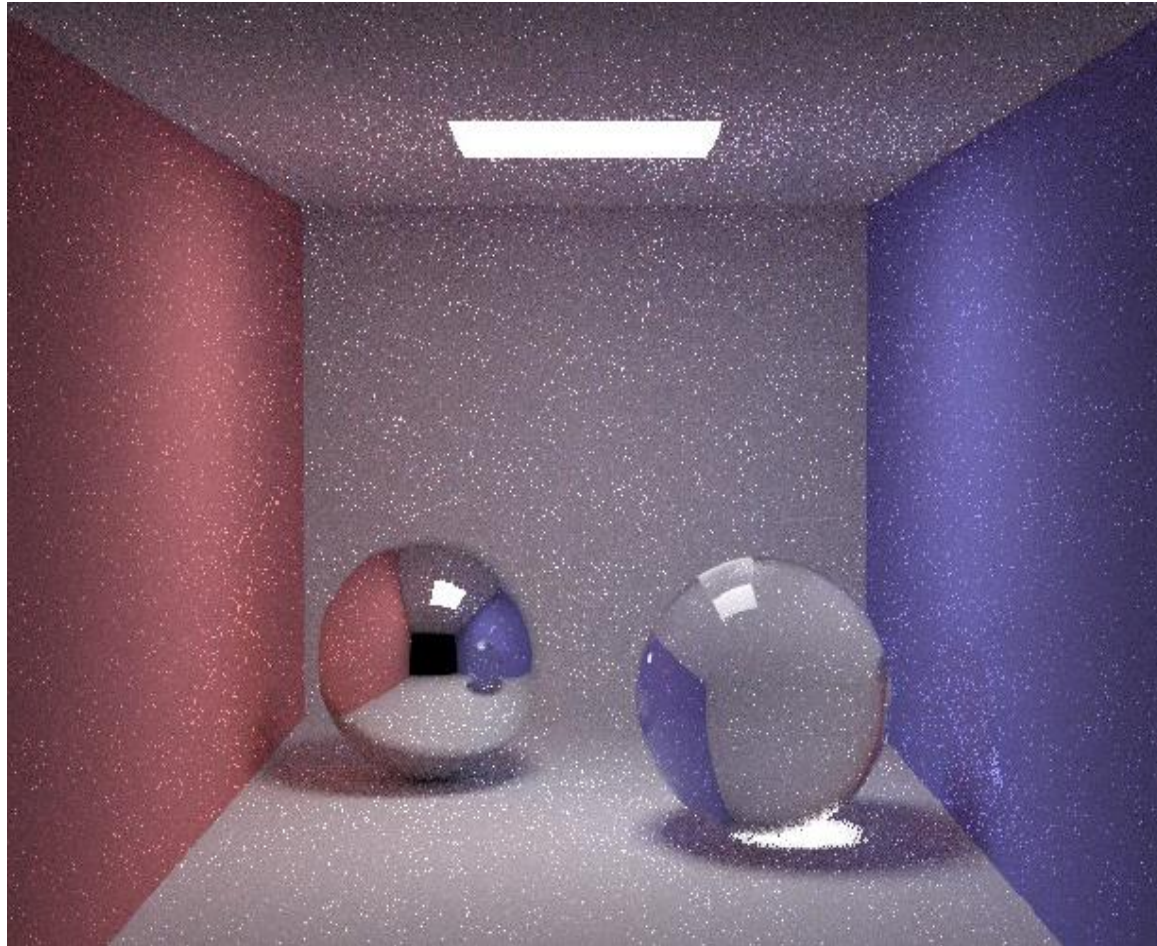


High Discrepancy
(clusters of points)



Low Discrepancy
(more uniform)

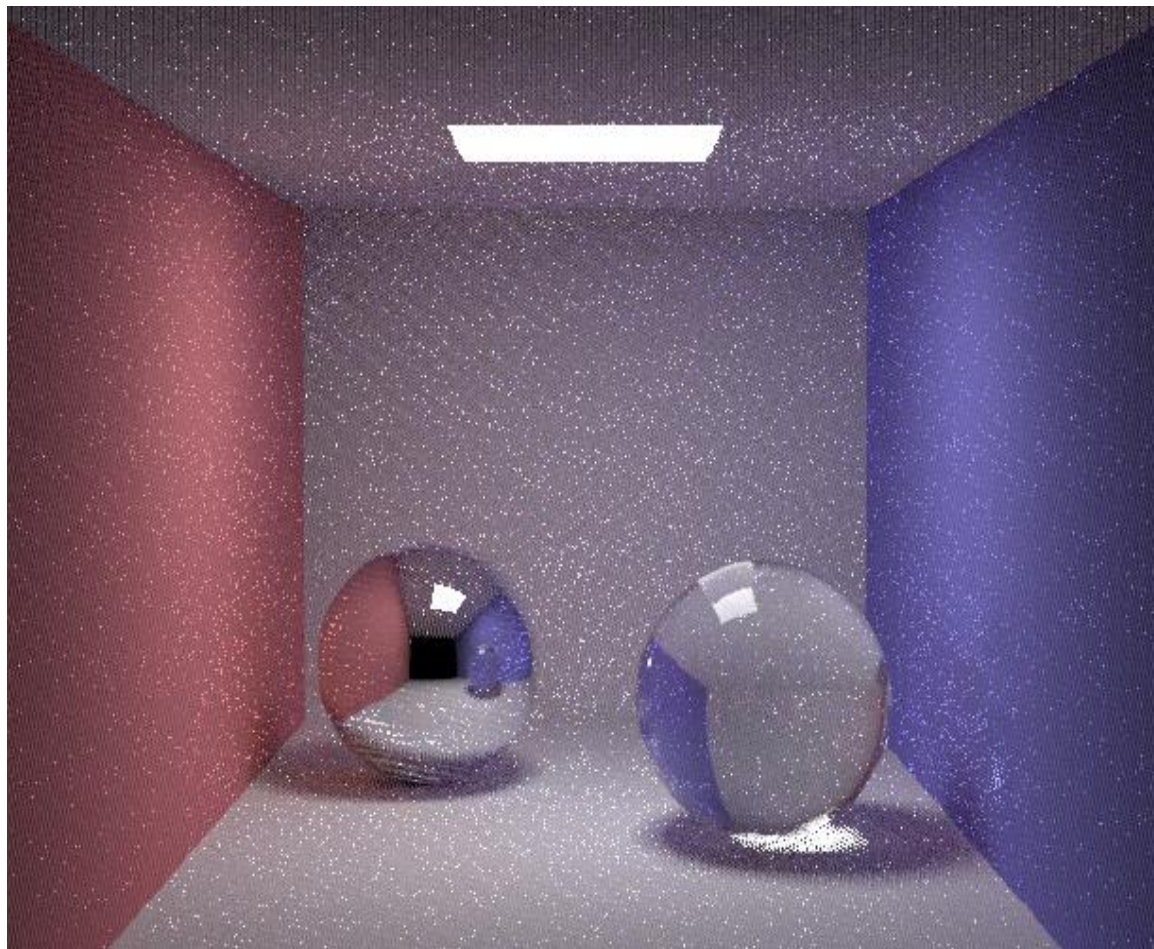
Stratified sampling



10 cest na pixel

Henrik Wann Jensen

Quasi-Monte Carlo



10 cest na pixel

Henrik Wann Jensen

Fixní náhodná sekvence

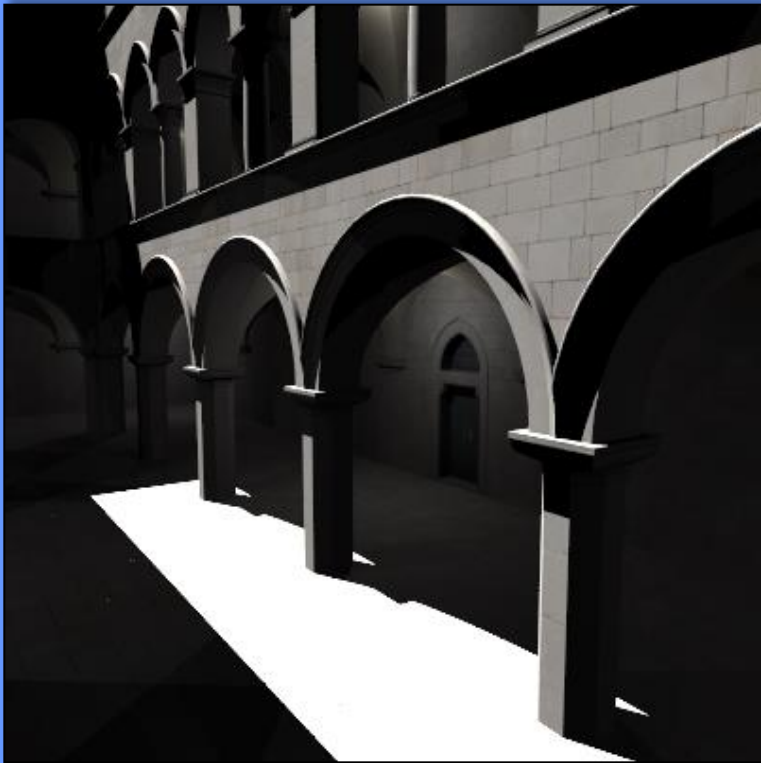


Henrik Wann Jensen

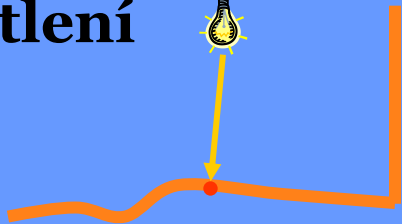
10 cest na pixel

Příklady MC estimátorů

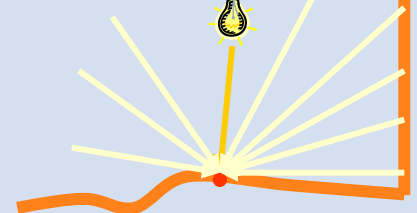
Přímé osvětlení



Přímé osvětlení

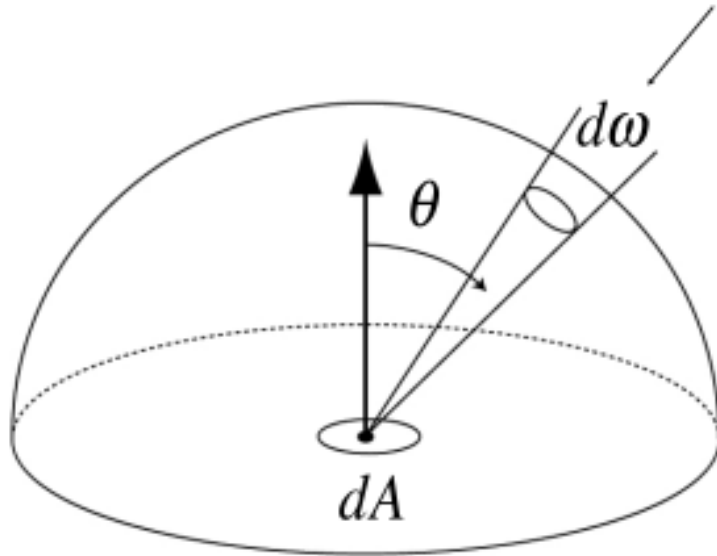


Globální =
přímé +
nepřímé



Odhad irradiance – uniformní vzork.

$$E(\mathbf{x}) = \int_{H(\mathbf{x})} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$



- Uniformní vzorkování:

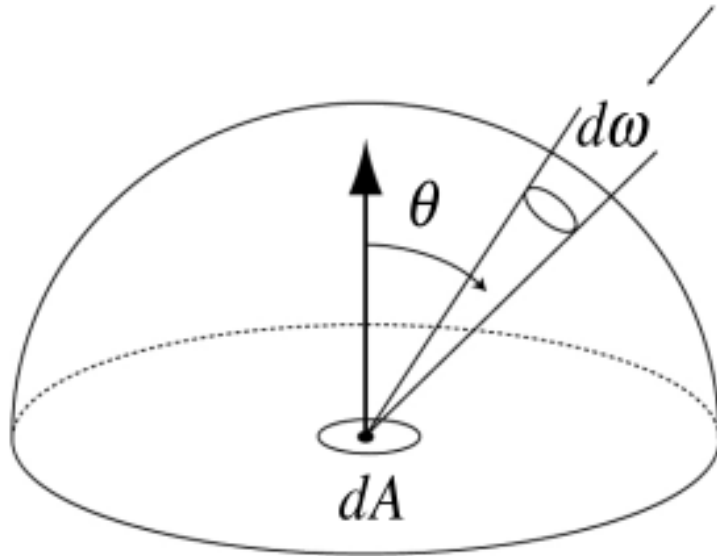
$$p(\omega) = \frac{1}{2\pi}$$

- Estimátor:

$$\begin{aligned} F_N &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{f(\omega_{i,k})}{p(\omega_{i,k})} \\ &= \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N L_i(\mathbf{x}, \omega_{i,k}) \cdot \cos \theta_{i,k} \end{aligned}$$

Odhad irradiance – cos vzorkování

$$E(\mathbf{x}) = \int_{H(\mathbf{x})} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$



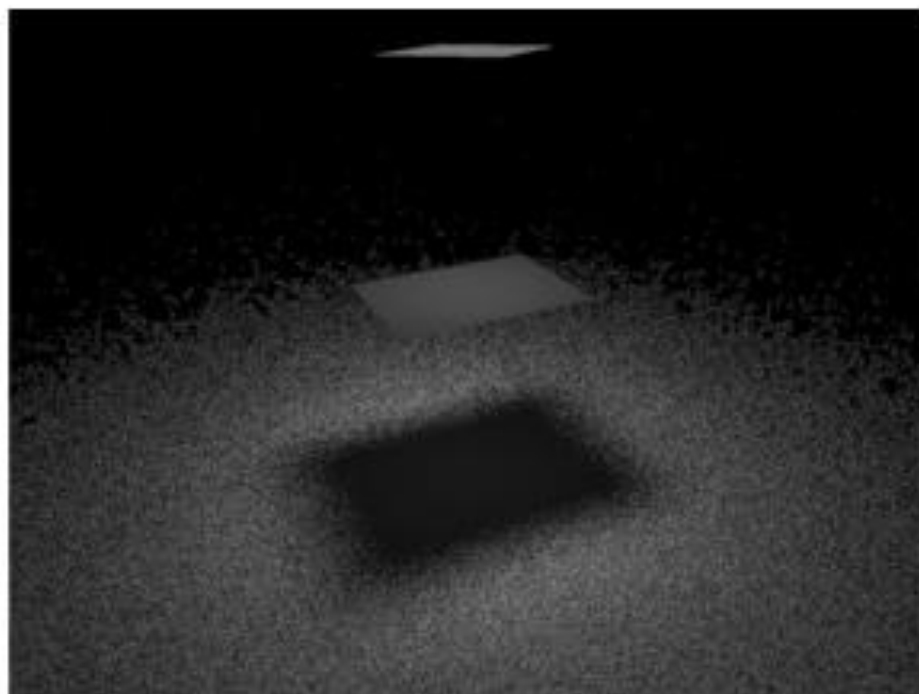
- Importance sampling:

$$p(\omega) = \frac{\cos \theta}{\pi}$$

- Estimátor:

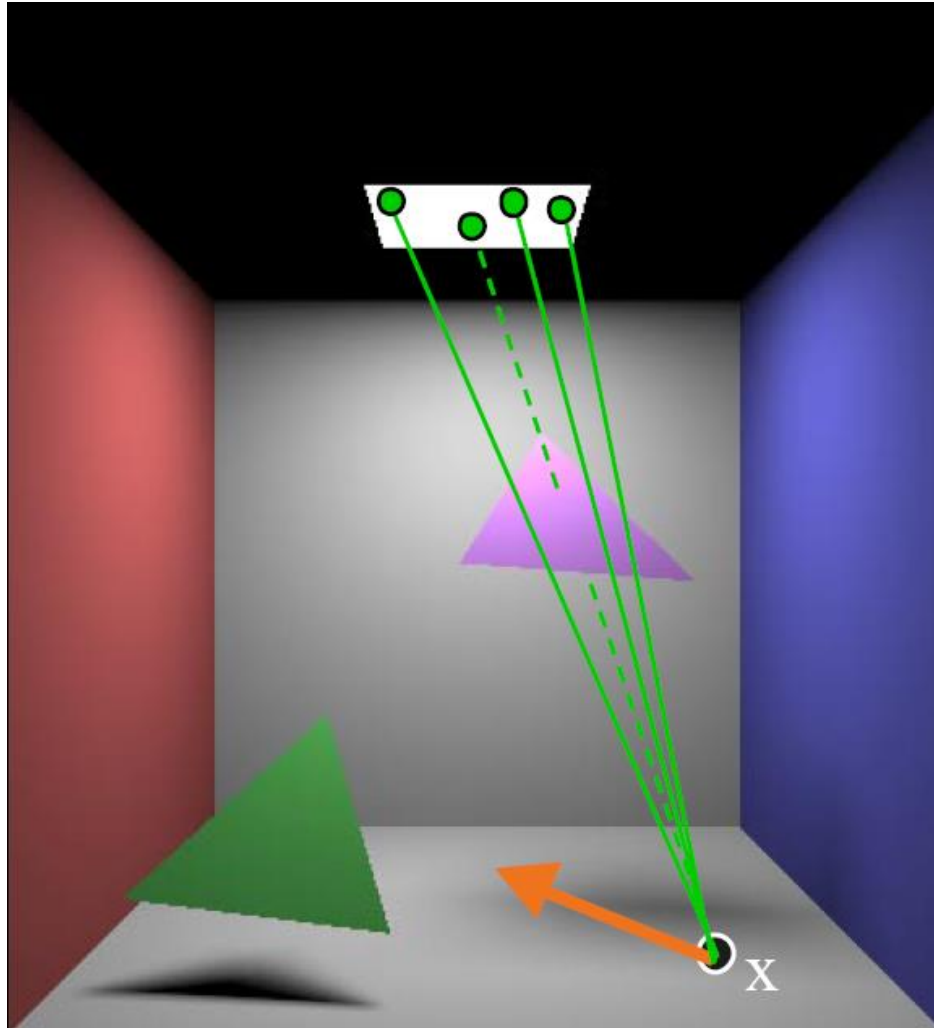
$$\begin{aligned} F_N &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{f(\omega_{i,k})}{p(\omega_{i,k})} \\ &= \frac{\pi}{N} \sum_{k=1}^N L_i(\mathbf{x}, \omega_{i,k}) \end{aligned}$$

Computing Irradiance



4 eye rays per pixel
100 shadow rays

Odhad irradiance – vzorkování zdroje



Odhad irradiance – vzorkování zdroje

$$E(\mathbf{x}) = \int_{H(\mathbf{x})} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$
$$= \int_A L_e(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) \cdot V(\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x}) \cdot \frac{\cos \theta_y \cdot \cos \theta_x}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2} \, dA$$

$G(\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x})$
↙

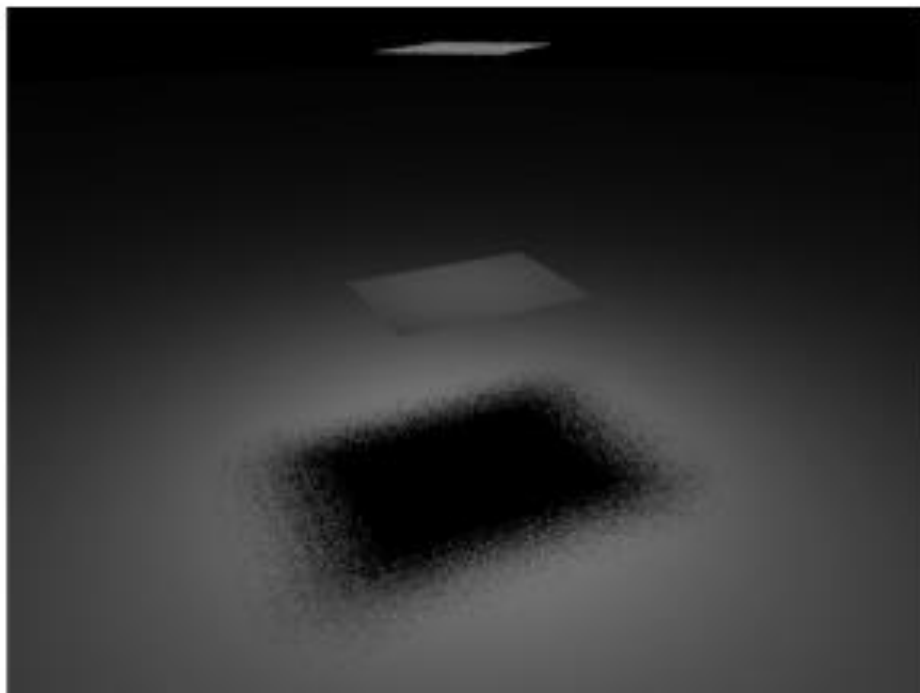
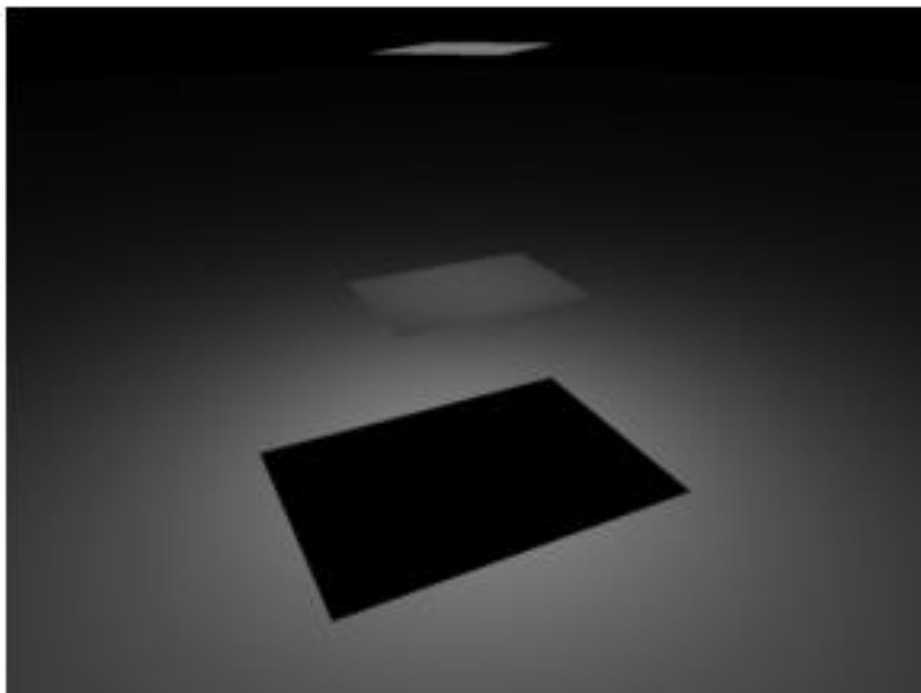
- Uniformní vzorkování plochy zdroje:

$$p(\mathbf{y}) = \frac{1}{|A|}$$

- **Estimátor**

$$F_N = \frac{|A|}{N} \sum_{k=1}^N L_e(\mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{x}) \cdot V(\mathbf{y}_k \leftrightarrow \mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{y}_k \leftrightarrow \mathbf{x})$$

Example – Area Sampling

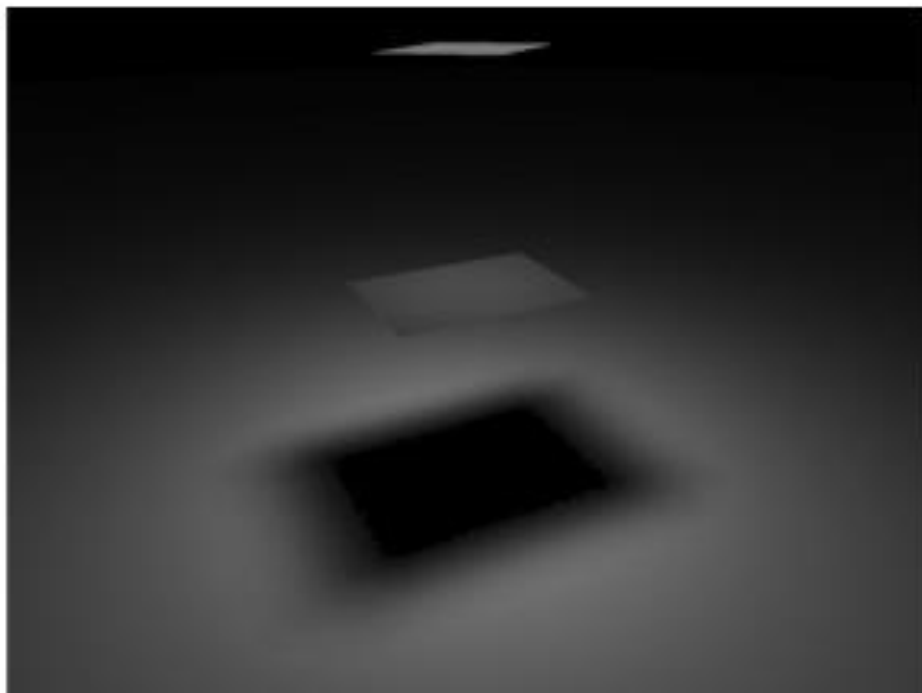
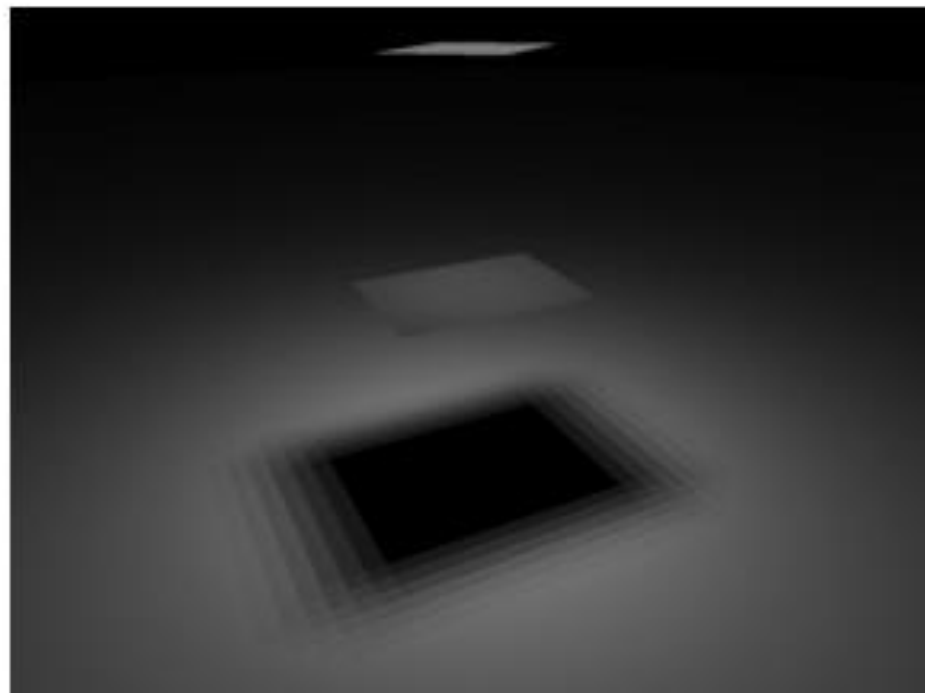


1 shadow ray per eye ray

Center

Random

Example – Area Sampling

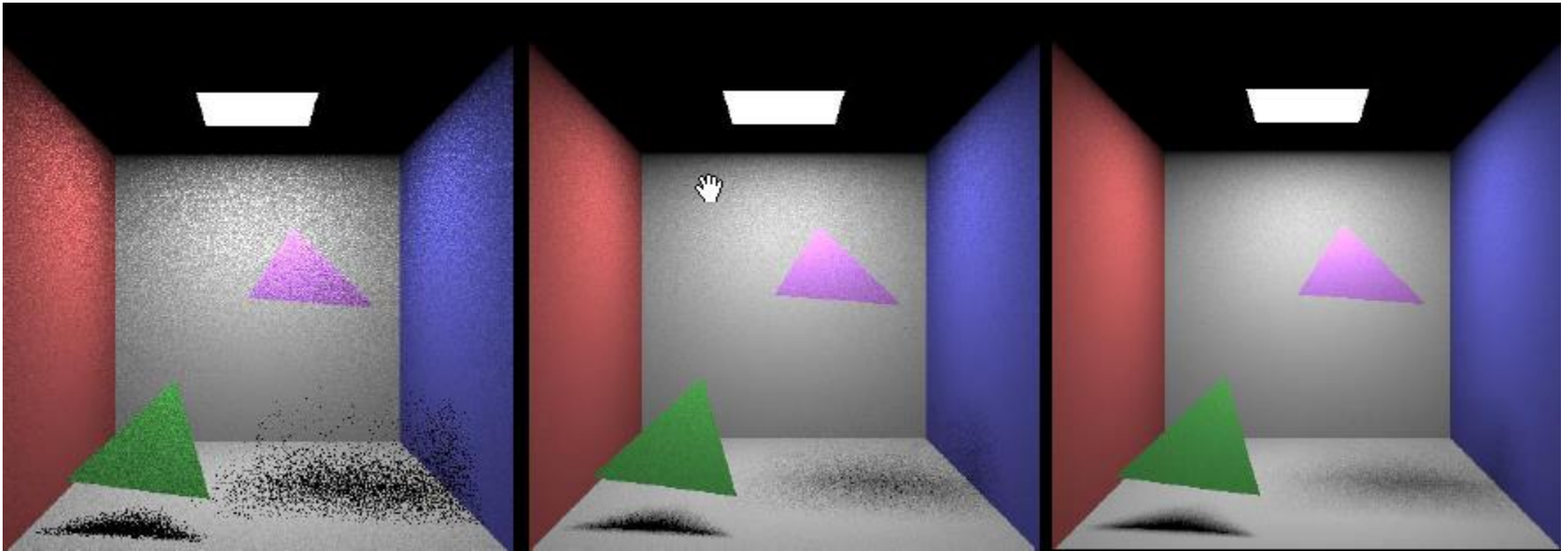


16 shadow rays per eye ray

Uniform grid

Stratified random

Plošné zdroje světla



1 vzorek na pixel

9 vzorků na pixel

36 vzorků na pixel

Přímé osvětlení na ploše s obecnou BRDF

- Odhadovaný integrál

$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = \int_A L_e(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) \cdot f_r(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \omega_o) \cdot V(\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x}) dA$$

- **Estimátor** (uniformní vzorkování povrchu zdroje)

$$F_N = \frac{|A|}{N} \sum_{k=1}^N L_e(\mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{x}) \cdot f_r(\mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \omega_o) \cdot V(\mathbf{y}_k \leftrightarrow \mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{y}_k \leftrightarrow \mathbf{x})$$